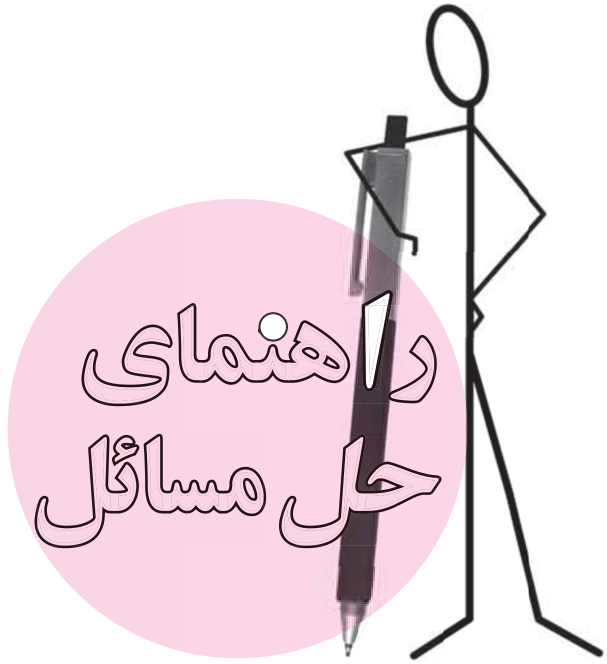


پاسخ‌نامهٔ ریاضی ۳ تجربی

۱. اگر: $2-x^2<f(x)\le 2\cos x$، با توجه به اینکه:

$$\begin{cases}\lim_{x\to 0}(2-x^2)=2-0=2\\ \lim_{x\to 0}(2\cos x)=2\cos 0=2\times 1=2\end{cases}$$

، از قضیهٔ فشردگی داریم: $\lim_{x\to 0} f(x)=2$. پس:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{f(x)+1}=\frac{\lim_{x\to 0} f(x)-1}{\lim_{x\to 0} f(x)+1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$$

۲.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{2x^2-3x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(x^2+1)}{(2x-1)\cancel{(x-1)}}$$

$$=\frac{(1+1)(1+1)}{(2-1)}=\frac{4}{1}=4$$

۳.

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x+\sqrt{3-x}}{x^2+x}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2x+\sqrt{3-x}}{x(x+1)}\times\frac{2x-\sqrt{3-x}}{2x-\sqrt{3-x}}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{4x^2-(3-x)}{x(x+1)(2x-\sqrt{3-x})}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{4x^2+x-3}{x(x+1)(2x-\sqrt{3-x})}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(4x-3)}{x\cancel{(x+1)}(2x-\sqrt{3-x})}=\frac{-4-3}{-1(-2-2)}=\frac{-7}{4}$$

۴. با توجه به اینکه: $\cos 2x=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$، داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cancel{(\tan x-1)}(1+\tan^2 x)}{\cancel{(1-\tan x)}(1+\tan x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-(1+\tan^2 x)}{1+\tan x}=\frac{-2}{2}=-1$$

پاسخ‌نامهٔ جبر و احتمال

۱.

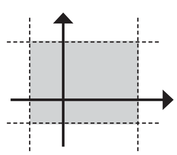
الف) $\boxed{5}\,\boxed{5}\,\boxed{4}\Rightarrow n(s)=5\times 5\times 4=100$

مهره اول، مهره دوم، مهره سوم

ب) $\boxed{5}\,\boxed{4}\,\boxed{3}\Rightarrow n(s)=5\times 4\times 3=60$

ج) $\boxed{5}\,\boxed{5}\,\boxed{5}\Rightarrow n(s)=5\times 5\times 5=125$

د) S={ر,(پ,ر),(پ,پ,ر),(پ,پ,پ,ر),...} ⇐ S نامتناهی است.

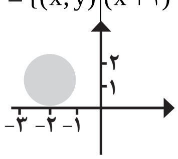


هـ) $S=\{(x,y)\mid -1<x,y<3\}$

⇐ S نامتناهی است.

و) $S=\{(x,y)\mid \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}\le 1\}$

$=\{(x,y)\mid (x+2)^2+(y-1)^2\le 1\}$



⇐ S نامتناهی است.

ز) پرتاب تاس ← پرتاب ۲ سکه ← مضرب ۳ (۳ یا ۶)

پرتاب تاس ← در غیر این‌صورت (۱، ۲، ۴ و ۵)

$\Rightarrow n(S)=[2\times(2\times 2)]+(4\times 6)=8+24=32$

۲.

$A=\{(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

$B=\{(2,2),(2,3),(2,5),(3,2),(3,3),(3,5),(5,2),(5,3),(5,5)\}$

الف) $A\cap B=\{(۵,۵)\}$

ب) $A-B=\{(۳,۶),(۴,۵),(۴,۶),(۵,۴),(۵,۶),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$

ج) $(A-B)\cup(B-A)$

د) $(A\cup B)'$

هـ) $A\cup B$

پاسخ‌نامهٔ حسابان

۱.

$$\cos ۲\alpha=\cos[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]$$
$$=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$
$$=(-\frac{۲}{۳})(\frac{۱}{۳})-\sqrt{۱-\frac{۴}{۹}}.\sqrt{۱-\frac{۱}{۹}}$$
$$=-\frac{۲}{۹}-(\frac{\sqrt{۵}}{۳})(\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})=\frac{-۲-۲\sqrt{۱۰}}{۹}$$

۲.

$$۴\sin x.[\sin(\frac{\pi}{۳}-x)\sin(\frac{\pi}{۳}+x)]$$
$$=۴\sin x[-\frac{۱}{۲}(\cos\frac{۲\pi}{۳}-\cos ۲x)]$$
$$=-۲\sin x(-\frac{۱}{۲}-\cos ۲x)=-۲\sin x(-\frac{۱}{۲}-۱+۲\sin^۲ x)$$
$$=-۲\sin x(-\frac{۳}{۲}+۲\sin^۲ x)=۳\sin x-۴\sin^۳ x=\sin ۳x$$

۳.

الف) $\cot x-۳\tan x=۰\Rightarrow\frac{۱}{\tan x}-۳\tan x=۰$

$$\Rightarrow ۱-۳\tan^۲ x=۰\Rightarrow\tan^۲ x=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\tan x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$
$$=\pm\tan(\frac{\pi}{۶})\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$$

ب) $\sqrt{۳}\sin x+\cos x=\sqrt{۲}$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x+\frac{۱}{۲}\cos x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۴}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۱۲}\\ x+\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}\end{cases}$$

۴. الف) می‌دانیم که $\sin^{-۱}(\sin x)=x$ به شرطی که $-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}$. با توجه به اینکه $\sin\frac{۲\pi}{۳}=\sin\frac{\pi}{۳}$، پس:

$$\sin^{-۱}(\sin\frac{۲\pi}{۳})=\sin^{-۱}(\sin\frac{\pi}{۳})=\frac{\pi}{۳}$$

ب) قرار دهید $\alpha=\cos^{-۱}(\frac{۱}{۵})$، پس $\cos\alpha=\frac{۱}{۵}$ و $۰\le\alpha\le\frac{\pi}{۲}$. اکنون باید مقدار $\sin ۲\alpha$ را به‌دست آوریم. با توجه به اینکه α در ربع اول است، پس $\sin\alpha>۰$.

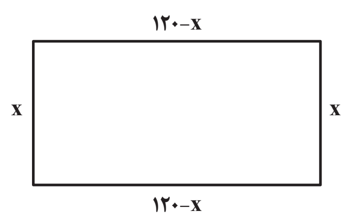
$$\sin\alpha=\sqrt{۱-\cos^۲\alpha}=\sqrt{۱-\frac{۱}{۲۵}}=\frac{\sqrt{۲۴}}{۵}=\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}$$
$$\Rightarrow\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha=۲(\frac{۲\sqrt{۶}}{۵})(\frac{۱}{۵})=\frac{۴\sqrt{۶}}{۲۵}$$

پاسخ‌نامهٔ ریاضی دهم

۱. اگر این عدد a باشد، داریم: $۲a=\frac{a^۲}{۳}-۹$. اکنون این معادله را حل می‌کنیم.

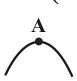
$$۲a=\frac{a^۲}{۳}-۹\xrightarrow{\times ۳}۶a=a^۲-۲۷\Rightarrow a^۲-۶a-۲۷=۰$$
$$\Rightarrow(a-۹)(a+۳)=۰\Rightarrow a=۹\ \text{یا}\ a=-۳\xrightarrow{a>۰}a=۹$$

۲. طول و عرض این زمین را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.



مساحت این زمین عبارت است از:

$S=x(۱۲۰-x)=۱۲۰x-x^۲$



بنابراین نمودار $S=۱۲۰x-x^۲$ به‌صورت یک سهمی به شکل است که A رأس آن است و عرض این نقطه، بیشترین مقدار مساحت را حاصل می‌کند.

$$\text{رأس}\ x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱۲۰}{-۲}=۶۰$$
$$\Rightarrow S=۱۲۰(۶۰)-(۶۰)^۲=۷۲۰۰-۳۶۰۰=۳۶۰۰$$

و زمین باید مربع شکل به ضلع ۶۰ باشد.

۳.

الف)
$$\begin{cases}x^۳-۱=(x-۱)(x^۲+x+۱)=۰\\ \qquad\Rightarrow\begin{cases}x-۱=۰\Rightarrow x=۱\\ x^۲+x+۱=۰\Rightarrow\Delta=-۳<۰\end{cases}\\ -x^۲+x-۲=۰\Rightarrow\Delta=-۷<۰\end{cases}$$

x		۱	
$(x-۱)$	−	•	+
$x^{۲}+x+۱$	+		+
$-x^{۲}+x-۲$	−		−
$\frac{x^{۳}-۱}{-x^{۲}+x-۲}$	+	•	−

$\Rightarrow x\leq ۱$

ب) $\left|x-\frac{۲}{۳}\right|+۱<\frac{۵}{۳}\Rightarrow\left|x-\frac{۲}{۳}\right|<\frac{۵}{۳}-۱$

$$\Rightarrow\left|x-\frac{۲}{۳}\right|<\frac{۲}{۳}\Rightarrow-\frac{۲}{۳}<x-\frac{۲}{۳}<\frac{۲}{۳}$$

$$\overset{+\frac{۲}{۳}}{\Rightarrow}۰<x<\frac{۴}{۳}$$

۴.

$$\begin{cases}(۰,۲)\Rightarrow ۲=a\cancel{(۰)}+b\cancel{(۰)}+c\Rightarrow\boxed{c=۲}\\(-۱,۰)\Rightarrow ۰=a(۱)+b(-۱)+۲\Rightarrow a-b=-۲\\(۲,۰)\Rightarrow ۰=a(۴)+b(۲)+۲\Rightarrow ۴a+۲b=-۲\end{cases}$$

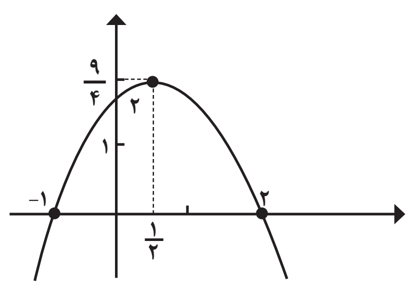
$$\Rightarrow\begin{cases}۲a\cancel{-۲b}=-۴\\۴a\cancel{+۲b}=-۲\end{cases}$$

$$\oplus\quad ۶a=-۶\Rightarrow\boxed{a=-۱}$$

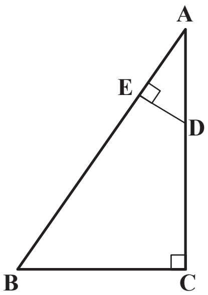
$$a-b=-۲\overset{a=-۱}{\Rightarrow}-۱-b=-۲\Rightarrow\boxed{b=۱}$$

پس: $y=-x^{۲}+x+۲$. این سهمی را با یافتن سه نقطه از آن‌که یکی از این نقاط، رأس آن است، رسم می‌کنیم.

x	$y=-x^{۲}+x+۲$
-۱	۰
$\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱}{-۲}=\frac{۱}{۲}$	$\frac{-۱}{۴}+\frac{۱}{۲}+۲=\frac{۹}{۴}$
۲	۰



پاسخنامهٔ هندسهٔ پایهٔ دهم



۱. مسئله را به این صورت مدل‌سازی می‌کنیم: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، AC=۴، AB=۵، DE⊥AB و DE=۰/۶. هدف یافتن طول DC است. ابتدا به کمک قضیهٔ فیثاغورس BC را می‌یابیم و سپس به کمک تشابه مثلث‌های ADE و ABC، طول AD و از آنجا DC را به‌دست می‌آوریم:

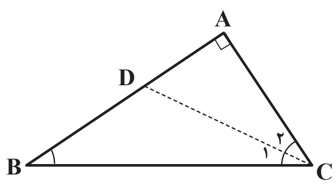
$$AB^{۲}=AC^{۲}+BC^{۲}\Rightarrow ۲۵=۱۶+BC^{۲}\Rightarrow BC=۳$$

$$\hat{A}=\hat{A},\hat{E}=\hat{C}=۹۰^{\circ}\Rightarrow\Delta ADE\sim\Delta ABC$$

$$\Rightarrow\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}\Rightarrow\frac{۰/۶}{۳}=\frac{AD}{۵}\Rightarrow AD=۱\Rightarrow DC=۳$$

یعنی مبدأ خیابان فرعی در فاصلهٔ ۳ کیلومتری از انتهای آن واقع است.

۲. با توجه به مفروضات مسئله داریم: $AB^{۲}+AC^{۲}=BC^{۲}$.

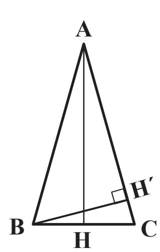


در نتیجه طبق عکس قضیهٔ فیثاغورس، $\hat{A}=۹۰^{\circ}$ علاوه بر آن: $\sin B=\frac{AC}{BC}=\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه: $\hat{B}=۳۰^{\circ}$ و $\hat{C}=۶۰^{\circ}$. بنابراین اگر CD نیمساز زاویهٔ C باشد، آن‌گاه: $\hat{C}_{۱}=\hat{B}=۳۰^{\circ}$ و بنابراین: CD=BD. حال با توجه به قضیه نیمسازها داریم:

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}\Rightarrow\frac{AD}{BD}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{\overbrace{AD+BD}^{AB=۴}}{BD}=\frac{۸}{۵}$$

$$\Rightarrow BD=۲/۵\Rightarrow CD=۲/۵$$

۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH، AH را به کمک قضیهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آوریم و سپس به کمک مساحت مثلث، طول ارتفاع ´BH را می‌یابیم.



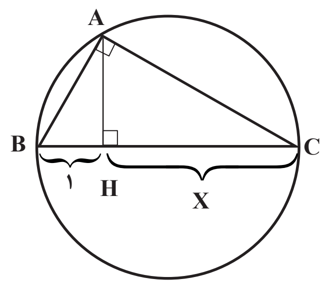
$$BH = HC = \frac{BC}{۲} = ۲ \qquad \Delta ABH : AH^{۲} + BH^{۲} = AB^{۲}$$

$$\Rightarrow AH^{۲} + ۴ = ۶۴ \Rightarrow AH^{۲} = ۶۰ \Rightarrow AH = ۲\sqrt{۱۵}$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AH.BC = \frac{۱}{۲} BH'.AC$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{۱۵} \times ۴ = ۸BH' \Rightarrow BH' = \sqrt{۱۵}$$

۴. در امتداد پاره‌خط به طول x، پاره‌خطی به طول واحد (۱) رسم می‌کنیم. سپس دایره‌ای به قطر BC=x+۱ می‌کشیم.



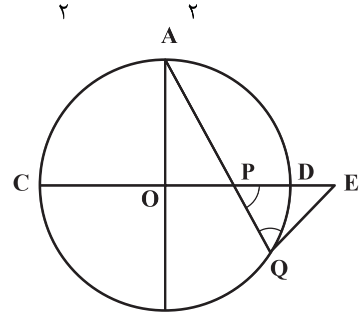
از نقطهٔ H روی BC عمودی خارج می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ A قطع کند. طبق ویژگی‌های مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$AH^{۲} = BH.HC \Rightarrow AH^{۲} = x,\ AH = \sqrt{x}$$

پاسخ‌نامهٔ هندسهٔ ۲

۱. زاویهٔ ظلی Q برابر است با:

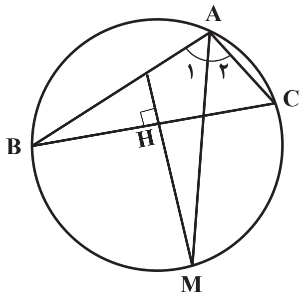
$$\hat{Q} = \frac{\widehat{AQ}}{۲} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{DQ}}{۲} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{DQ}}{۲}$$



و زاویهٔ داخلی P نیز برابر با همین است: $\hat{P} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{DQ}}{۲}$

بنابراین: $\hat{P} = \hat{Q}$ و از آنجا: PE=QE.

۲. فرض می‌کنیم عمودمنصف BC، دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ M قطع کند. چنانچه می‌دانیم، عمودمنصف هر وتر، از مرکز دایره می‌گذرد و کمان آن وتر را نیز نصف می‌کند. بنابراین: $\widehat{CM} = \widehat{BM}$.



حال M را به A وصل می‌کنیم و از آنجا داریم: $\hat{A}_{۲} = \frac{\widehat{CM}}{۲}$ و $\hat{A}_{۱} = \frac{\widehat{BM}}{۲}$ و در نتیجه: $\hat{A}_{۱} = \hat{A}_{۲}$ و یعنی AM نیم‌ساز A است.

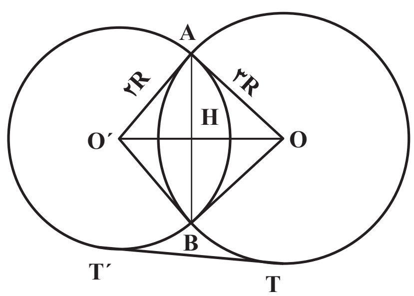
۳. می‌دانیم خط‌المرکزین هر دو دایره عمودمنصف وتر مشترک آن‌هاست. (چرا؟)

بنابراین داریم: AH=BH=R و در نتیجه:

$$OH = \sqrt{۹R^{۲} - R^{۲}} = ۲\sqrt{۲}R,\ O'H = \sqrt{۴R^{۲} - R^{۲}} = \sqrt{۳}R$$

$$\Rightarrow d = OO' = (۲\sqrt{۲} + \sqrt{۳})R,\ TT' = \sqrt{d^{۲} - (R - R')^{۲}}$$

$$= \sqrt{(۲\sqrt{۲} + \sqrt{۳})^{۲}R^{۲} - R^{۲}} = \sqrt{۱۰ + ۴\sqrt{۶}}R = (\sqrt{۶} + ۲)R$$



پرسش‌های پیکارجو! ۵

به چند طریق می‌توان از مجموعهٔ زیر یک سه‌تایی انتخاب کرد که هر سه عدد مضرب ۹۱ باشند و مضرب ۱۰۱ نباشند؟

$$A = \left\{ ۱, ۱۱, ۱۱۱, \ldots, \underbrace{۱۱۱\ldots۱}_{\text{۱۳۹۵ رقم}} \right\}$$

الف) ۲۰۵۴۳۶۰

ب) ۲۶۰۱۳۰

ج) ۲۰۲۷۷۹۵

د) ۲۴۶۹۰۵

هـ) ۲۵۳۴۶۰